EPFL

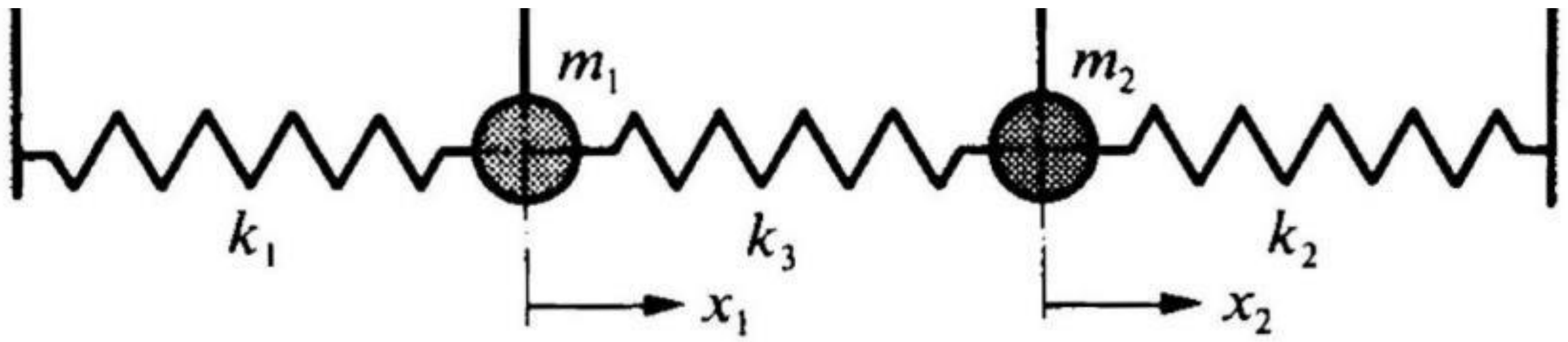
Leçon 8.0 Oscillateur Généralisé – Intro//Rappel –

ME-332 – Mécanique Vibratoire

Prof. Guillermo Villanueva

École polytechnique fédérale de Lausanne

Systèmes symétriques (leçon 6)



Solutions générales du régime libre du système symétrique

$$x_1 = X_I \cos(\omega_I t - \varphi_I) + X_{II} \cos(\omega_{II} t - \varphi_{II})$$
$$x_2 = X_I \cos(\omega_I t - \varphi_I) - X_{II} \cos(\omega_{II} t - \varphi_{II})$$

$$\vec{x}(t) = X_I \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\omega_I t - \varphi_I) + X_{II} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cos(\omega_{II} t - \varphi_{II})$$

Premier mode du système (oscillations en phase)

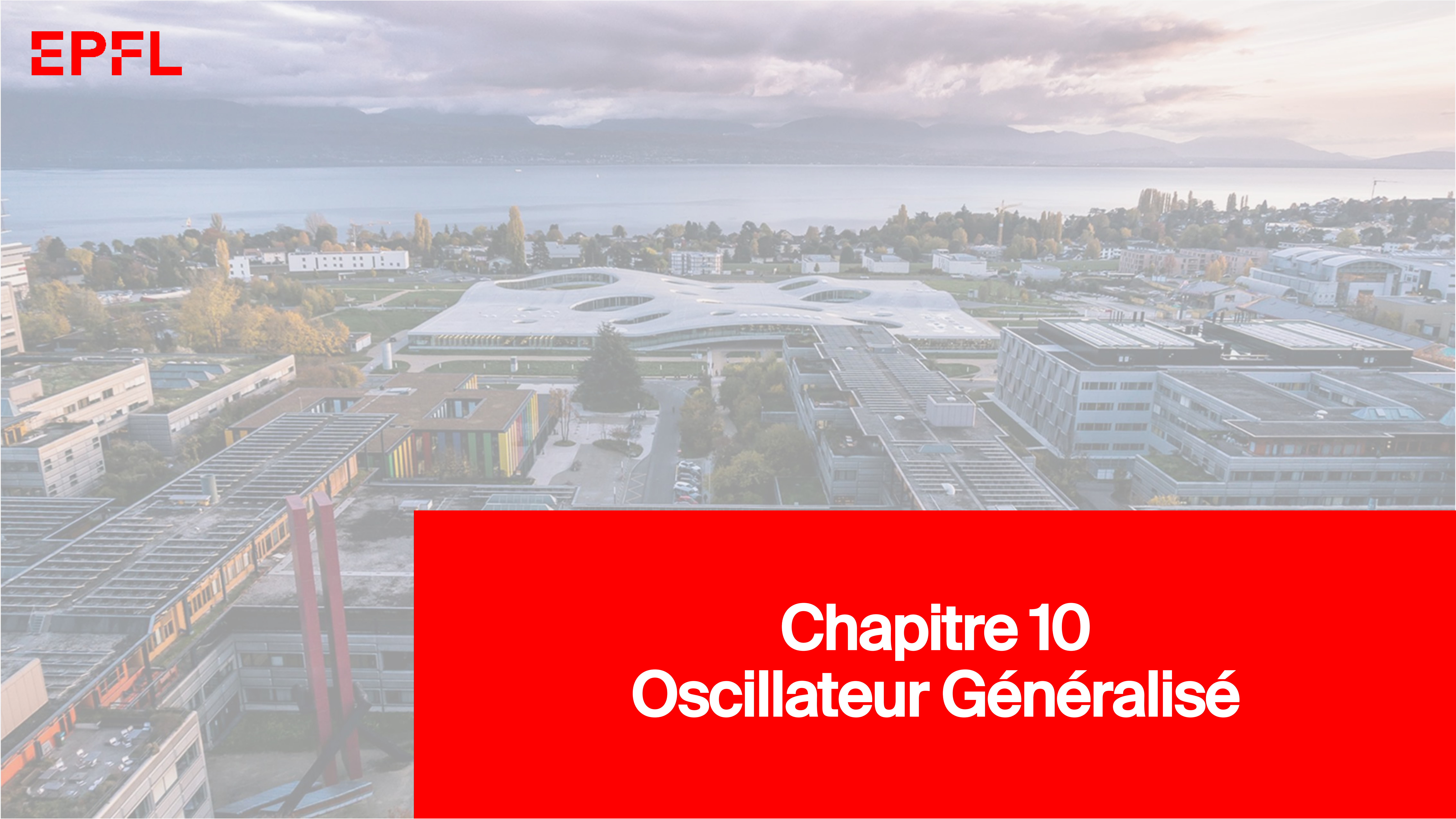
$$x_1 = x_2 = X_1 \cos(\omega_1 t - \varphi_1) \qquad (8.22)$$

Deuxième mode du système (oscillations en opposition de phase)

$$\begin{cases} x_1 = X_2 \cos(\omega_2 t - \varphi_2) \\ x_2 = -X_2 \cos(\omega_2 t - \varphi_2) \end{cases} \qquad (8.23)$$

Modes propres et Réponse dynamique

https://www.youtube.com/watch?v=oe0Pjv2zopQ



Chapitre 10
Oscillateur Généralisé

Concept d'oscillateur généralisé – E.d.M

Equation différentielle matricielle d'un *système oscillant linéaire général discret* ou *oscillateur généralisé* à n degrés de liberté

$$[M]\ddot{\boldsymbol{x}} + [C]\dot{\boldsymbol{x}} + [K]\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}(t) \qquad (10.1)$$

$\boldsymbol{x}$	vecteur des déplacements
$\dot{\boldsymbol{x}}$	vecteur des vitesses
$\ddot{\boldsymbol{x}}$	vecteur des accélérations
$[M]$	matrice des masses
$[C]$	matrice d'amortissement (pertes)
$[K]$	matrice de rigidité
$\boldsymbol{f}$	vecteur des forces extérieures

Exemples d'oscillateurs généralisés à n degrés de liberté

- systèmes de solides indéformables, soumis à des forces élastiques et des forces résistives linéaires
- systèmes continus déformables, discrétisés par des méthodes numériques ou expérimentales

Concept d'oscillateur généralisé - Energies

Energie cinétique de l'oscillateur généralisé (forme quadratique symétrique positive)

$$T = \frac{1}{2}\sum_i^n \sum_j^n m_{ij}\ \dot{x}_i \dot{x}_j = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{x}}^T [M] \dot{\boldsymbol{x}} \quad (10.2)$$

Energie potentielle de l'oscillateur généralisé (forme quadratique symétrique positive non strictement)

$$V = \frac{1}{2}\sum_i^n \sum_j^n k_{ij}\ x_i x_j = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T [K] \boldsymbol{x} \quad (10.3)$$

Fonction de dissipation de Rayleigh (demi-puissance consommée) de l'oscillateur (forme quadratique symétrique positive non strictement)

$$W = \frac{1}{2}\sum_i^n \sum_j^n c_{ij}\ \dot{x}_i \dot{x}_j = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{x}}^T [C] \dot{\boldsymbol{x}} \quad (10.4)$$

Equations de Lagrange

Equations de Lagrange d'un système dissipatif à n degrés de liberté

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_k} + \frac{\partial V}{\partial x_k} + \frac{\partial W}{\partial \dot{x}_k} = f_k(t)$$

$$k = 1, \ldots, n \quad (10.9)$$

ou sous forme vectorielle

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}\right\} - \left\{\frac{\partial T}{\partial x_i}\right\} + \left\{\frac{\partial V}{\partial x_i}\right\} + \left\{\frac{\partial W}{\partial \dot{x}_i}\right\} = \boldsymbol{f}(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{x}} + \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}} + \frac{\partial W}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}} = \boldsymbol{f}(t) \quad (10.10)$$

Equations de Lagrange

Equations de Lagrange de l'oscillateur généralisé
(énergie cinétique indépendante des déplacements)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}\right\} + \left\{\frac{\partial V}{\partial x_i}\right\} + \left\{\frac{\partial W}{\partial \dot{x}_i}\right\} = \boldsymbol{f}(t)$$

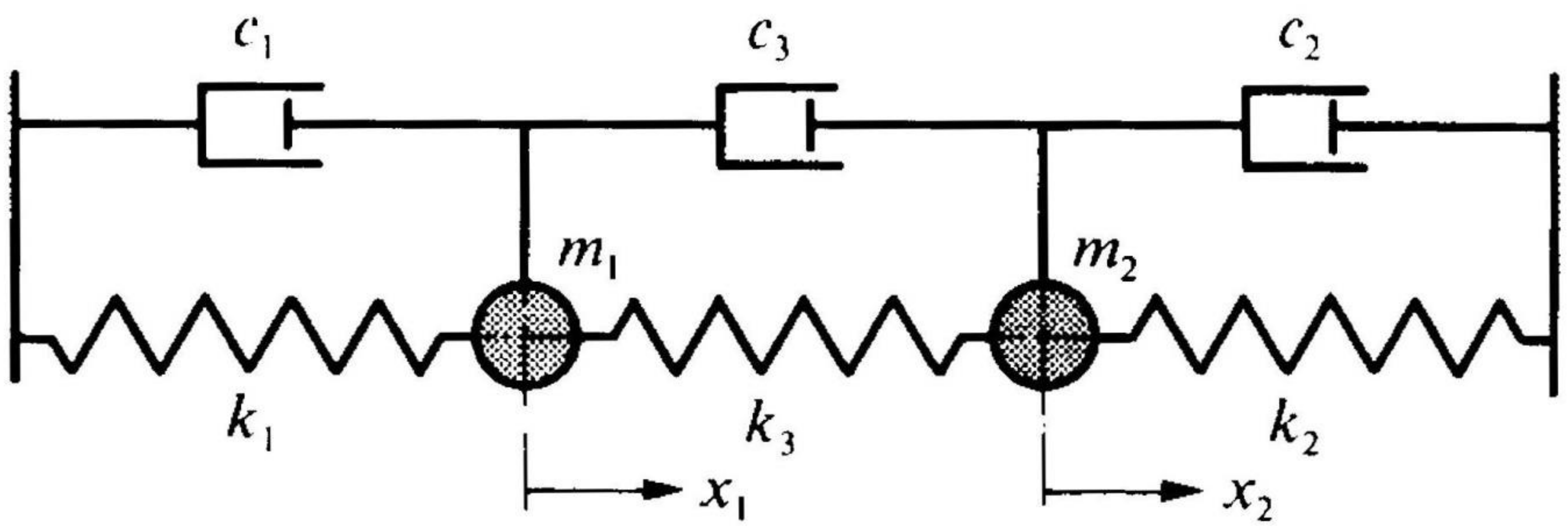
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}}\right) + \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}} + \frac{\partial W}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}} = \boldsymbol{f}(t) \qquad (10.11)$$

Application des équations de Lagrange à
l'oscillateur généralisé

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[M]\dot{\boldsymbol{x}} + [K]\boldsymbol{x} + [C]\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(t)$$

$$[M]\ddot{\boldsymbol{x}} + [C]\dot{\boldsymbol{x}} + [K]\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}(t)$$

Oscillateur Généralisé – Application à 2 DdL



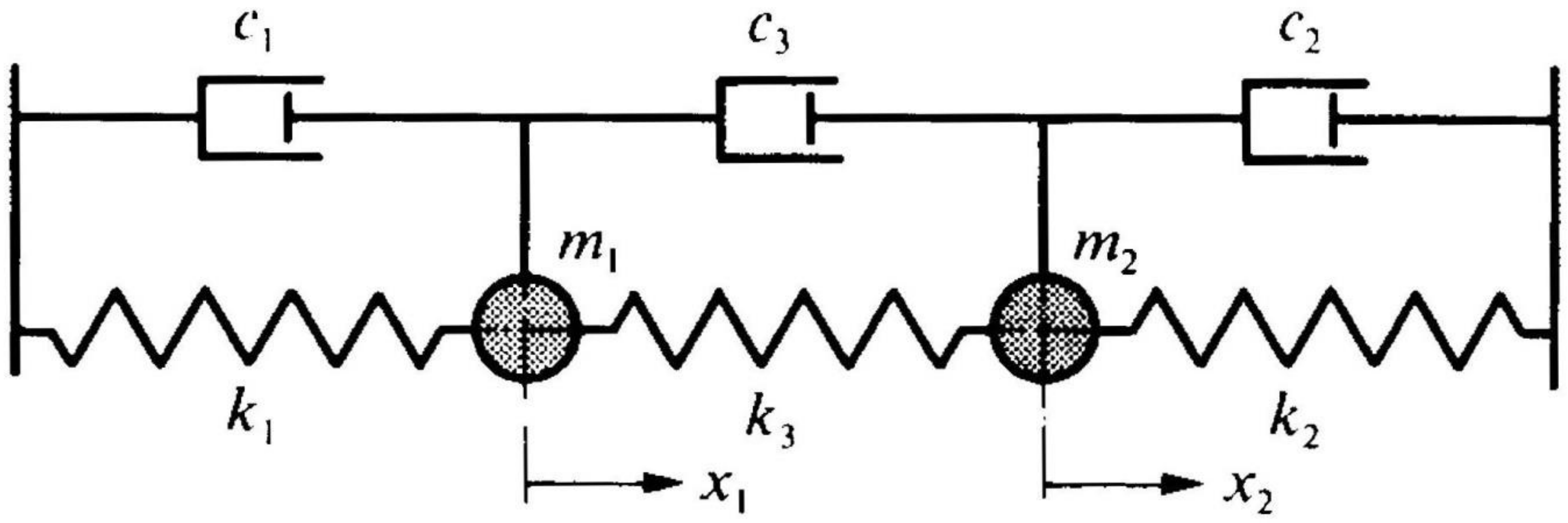
Energie cinétique du système à deux degrés de liberté

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2$$

$$= \frac{1}{2} \{\dot{x}_1 \quad \dot{x}_2\} \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{x}}^T [M] \dot{\boldsymbol{x}}$$

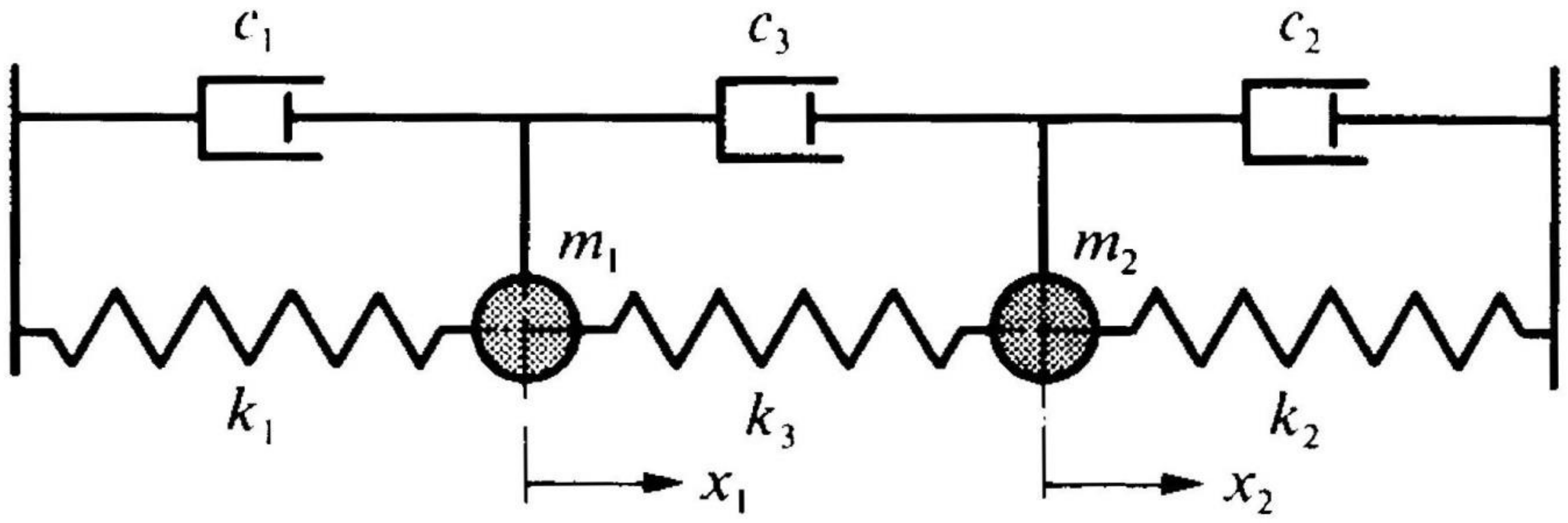
Oscillateur Généralisé – Application à 2 DdL



Energie potentielle du système à deux degrés de liberté

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{1}{2}\left(k_1\, x_1^2 + k_3\,(x_1 - x_2)^2 + k_2\, x_2^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\{x_1 \quad x_2\}\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_3 \\ -k_3 & k_2 + k_3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T\,[K]\,\boldsymbol{x}
\end{aligned}
$$

Oscillateur Généralisé – Application à 2 DdL



Fonction de dissipation de Rayleigh du système à deux degrés de liberté

$$W = \frac{1}{2}\left(c_1\,\dot{x}_1^2 + c_3\,(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2 + c_2\,\dot{x}_2^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\dot{x}_1 \quad {}^3 \quad \dot{x}_2\right\}\begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_3 \\ -c_3 & c_2 + c_3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{x}}^T\,[C]\,\dot{\boldsymbol{x}}$$